13-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз жүйелерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті **с**ызықты біртексіз жүйелерді интегралдау әдістерімен тансытыру.

Негізгі сөздер: Сипаттаушы теңдеу, меншікті сандар, меншікті векторлар, квазикөпмүшелік.

Қысқаша мазмұны

Тұрақты коэффициентті сызықты біртексіз жүйелерді интегралдау

Тұрақты коэффициентті біртексіз жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{17}$$

Мұнда $x = colon(x_1,...,x_n)$, $f(t) = colon(f_1,...,f_n)$, $A = (a_{ij})$- квадрат матрица. Оның сәйкес біртектісі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{18}$$

жүйесінің жалпы шешімі элементар функциялар арқылы өрнектелетіні өткен пунктте көрсетілді. Жалпы жағдайда біртексіз жүйенің жалпы шешімі тұрақтыларды вариациялау арқылы оңай табылады.

Егер (17) жүйедегі $f(t)$ вектор-функция квазикөпмүшелік түрінде берілсе, онда жүйенің дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып табуға болады. Табылған дербес шешімді біртекті жүйенің жалпы шешімімен қоссақ, берілген (17) жүйенің жалпы шешімін аламыз.

Айталық, біртексіз жүйе төмендегідей түрде берілсін:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P_m(t)e^{\alpha t} \tag{19}$$

Мұндағы, $P_m(t)$ - дәрежесі m-нен аспайтын көпмүшелікті вектор, яғни

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k t^k , \tag{20}$$

мұндағы p_k - тұрақты векторлар.

Бұл жерде екі жағдай қарастырылады.

1⁰. Резонанс емес жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны емес. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_m(t)e^{\alpha t} \tag{21}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_m(t)$ - вектор:

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k t^k \tag{22}$$

мұнда q_k - белгісіз тұрақты вектор.

Осы өрнекті (19) теңдікке қойып, t-ның әртүрлі дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз:

$$(\alpha E - A)Q_m(t) = P_m(t) - \frac{dQ_m(t)}{dt} \tag{23}$$

Осыдан

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha E - A)q_m = p_m, \\ (\alpha E - A)q_{m-1} = p_{m-1} - m q_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (24)$$

Мұнда $\alpha E - A$ матрицасы ерекше емес. Сондықтан, (24) жүйеден сатылап барлық q_m векторларын бірмәндес түрде анықтауға болады:

$$q_m = (\alpha E - A)^{-1} p_m \qquad (25)$$

екінші теңдеуден q_{m-1} векторын, осылай барлық векторларды табамыз.

2^0. Резонанс жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_{m+1}(t)e^{\alpha t} \qquad (26)$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_{m+1}(t)$ - вектор-функция, оның әрбір компоненті дәрежесі $m+1$-ден аспайтын көпмүшелік.

Егер α саны A матрицасының еселікті меншікті саны болса, онда $Q(t)$ векторының компоненттерінің t бойынша дәрежелері сәйкес еселік көрсеткішіне өседі (толық дәлелдеуін [4] оқу құралынан көруге болады).